UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA2112. Enero-Abril 2010
Primer parcial (50%)
lunes 22 de febrero 2010

TIPO A

1.- [13 ptos.] Sea $f : R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.
a) Diga si f es continua en (0, 0) ;
b) Halle las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$;
c) diga si f es diferenciable en (0, 0).

2. [13 ptos.] Sean $g : R^2 \to R^2$, $f: R^2 \to R$ funciones continua y diferenciables, sea g definida por $g(u, v) = (X(u, v), Y(u, v)) = (u^2+v, u+v^2)$ y sea H(u, v) la función compuesta $f \circ g$.

Conociendo que el plano tangente a la gráfica de f en el punto A(2, 0 , f(2, 0)) tiene ecuación $z = 5 -2(x-2)+3y$

a) halle los valores de f(2, 0), H(-1, 1) ;

b) halle la ecuación del plano tangente a la gráfica de H en el punto B(-1, 1, H(-1, 1)).

3. [12 ptos.]Halle el punto del paraboloide de ecuación $z=x^2+y^2$ cuya distancia al punto $P(2, 0, \frac{1}{2})$ sea mínima, asumiendo saber que un tal punto existe.

4.[12 ptos.] Halle y clasifique los puntos críticos de la función definida por $f(x, y)= x^2+4x-x(y^2-2)^2$, en la región $A=\{(x, y)\in R^2 \mid x^2+y^2 > 1 \}$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA2112. Enero-Abril 2010
Primer parcial (50%)
lunes 22 de febrero 2010

TIPO A

SOLUCION

1.- a) f es continua en (0, 0) [y en todo R^2] ya que es función compuesta de funciones continuas, como lo son los polinomios, la función "valor absoluto" y la raíz cuadrada aritmética.

Otra posible justificación : $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \le \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |xy| \le x^2+y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{|xy|} \le \sqrt{x^2+y^2}$, por consiguente , dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon$; entonces se tiene :
$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(0, 0)| = \sqrt{|xy|} \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$.

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0)- f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$; análogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

c) Una posible manera de justificar que f no es derivable en (0, 0) es verificar que no existe el límite por medio del cual se define la derivada :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y)-f(0, 0)- \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).x - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = ?$$

si se considera el límite a lo largo de uno de los ejes, el límite es =0 ; si se considera el límite a lo largo de una recta por el origen de pendiente m, el límite es :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x^2 m|}}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} = \frac{\sqrt{|m|}}{\sqrt{1+m^2}} \neq 0 \text{ , [si } m\neq 0 \text{] .}$$

Otra posible manera de justificar que f no es derivable en (0, 0) es la siguiente :
si f fuese derivable en (0, 0) , la derivada de f según el vector **v**=(a, b) , se podría calcular con el producto escalar por el gradiente : $\nabla f(0, 0).(a, b) = [0\ 0].(a, b) = 0.a+0.b=0$, mientras que el valor correcto de esta derivada está dado por :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(at, bt)-f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{|t^2ab|}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}\sqrt{|ab|} = \text{no existe si } ab\neq 0 \text{ .}$$

2-. a) Como las coordenadasd del pto. A deben satisfacer la ecuación del plano tangente en A, tenemos : f(2, 0) = 5-2.0+3.0 = 5 ; también tenemos H(-1, 1)=f(g(-1, 1))=f(2, 0) = 5.

Una ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto (2, 0, f(2, 0) = (2, 0, 5) es
$z=f(2, 0) +(\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0))(x-2) +(\frac{\partial f}{\partial y}(2, 0))(y-0)$ y debe ser la misma que la ecuación dada, así que, comparando las dos ecuaciones :
$z=f(2, 0) +(\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0))(x-2) +(\frac{\partial f}{\partial y}(2, 0))(y-0)$, $z= 5 -2(x-2)+3y$ constatamos que :
$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0)= -2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = 3$.

b) para obtener la ecuación del plano tangente a la gráfica de H en el punto B(-1, 1, H(-1, 1))

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA2112. Enero-Abril 2010
Primer parcial (50%)
lunes 22 de febrero 2010

TIPO A

en la forma : $z= H(-1, 1) +(\frac{\partial H}{\partial u}(-1, 1))(u+1) +(\frac{\partial H}{\partial v}(-1, 1))(v-1)$, necesitamos conocer las derivadas parciales : $\frac{\partial H}{\partial u}(-1, 1)$, $\frac{\partial H}{\partial v}(-1, 1)$;
Por la regla de la cadena se tiene que: $\nabla H(-1, 1) = \nabla f(g(-1, 1)). \nabla g(-1, 1)=$
$= \nabla f(2, 0). \nabla g(-1, 1)= [-2\ \ 3].\begin{bmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2v \end{bmatrix}_{(-1\ 1)} = [-2\ \ 3].\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = [7\ \ 4]$. Así que nos enteramos que $\frac{\partial H}{\partial u}(-1, 1) = 7$, $\frac{\partial H}{\partial v}(-1, 1) = 4$ y obtenemos la ecuación del plano tangente pedido : $z = 5 + 7(u+1) + 4(v-1)$.

3.- La distancia de un punto genérico, $Q(x, y, z)$, del paraboloide al punto $P(2, 0, \frac{1}{2})$ es mínima cuando es mínimo su cuadrado, así que para no tener que manipular raíces, hallaremos el mínimo de la función $QP^2= (x-2)^2+y^2+ (z - \frac{1}{2})^2$, con la condición $g(x, y, z) = x^2+y^2-z = 0$.
Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, tendremos que resolver el sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g=0 \end{cases} , \quad \begin{cases} 2(x-2)=2\lambda x \\ 2y=2\lambda y \\ 2(z-\frac{1}{2})=2z-1=-\lambda \\ x^2+y^2-z = 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} (1-\lambda)x=2 \\ (1-\lambda)y= 0 \\ 2z=1-\lambda \\ x^2+y^2-z = 0 \end{cases}$$

. Para que se cumpla con la segunda ecuación, debe ser $\lambda=1$ o $y=0$ y se constata de inmediato que con $\lambda=1$, en la primera ecuación resulta $0=2$, así que la única posibilidad de cumplir con la segunda ecuación, sin llegar a contradicciones, es $y=0$. Para hallar los valores de x, z, debemos entonces resolver el sistema :

$$\begin{cases} (1-\lambda)x = 2 \\ (1-\lambda)=2z \\ x^2-z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} = z = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x^3=1 \\ z=1/x \end{cases} \Rightarrow x=z=1$$

, de manera que el único "candidato" a punto de mínimo es $A(1, 0, 1)$ y como se admite que existe el mínimo , el punto buscado es A.

Otra posibilidad de resolver este problema, sin usar el método de Lagrange, puede ser hallar el mínimo de la función $g(x, y) = (x-2)^2+y^2+ (x^2+y^2 - \frac{1}{2})^2$;
anulando el gradiente $\nabla g = [\frac{\partial g}{\partial x} , \frac{\partial g}{\partial y}] = 2[x^3+xy^2-1 , y(x^2+y^2)]$;
se obtienen dos "candidatos" , a saber $P(x_1,y_1) = (1, 0)$, $Q(x_2,y_2)= (0, 0)$ y calculando los valores de la función g en P y en Q, se constata que el punto que proporciona la menor distancia es P, por lo cual el punto buscado del paraboloide es $A(1, 0, 1)$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA2112. Enero-Abril 2010
Primer parcial (50%)
lunes 22 de febrero 2010

TIPO A

4. Como la función dada es derivable en todo su dominio, los únicos puntos críticos se hallan anulando el gradiente $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x+4-(y^2-2)^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -4xy(y^2-2) = 0 \end{cases}$. Las posibilidades de cumplir con la segunda ecuación son : i) x=0 , ii) y=0 , iii) $y = \pm\sqrt{2}$ y se obtienen los siguientes puntos críticos : O(0, 0) , A(0, -2) , B(0, 2) , C(-2, $-\sqrt{2}$), D(-2, $\sqrt{2}$) , de los cuales el primero no pertenece a la región A, dada.

Hallemos ahora la matriz hessiana : $H=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4y(y^2-2) \\ -4y(y^2-2) & -4x(3y^2-2) \end{bmatrix}$;

$H(0, -2) = \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\begin{bmatrix} 2 & 16 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}) = -256 < 0 \Rightarrow (0, -2)$ es pto. de silla ;

$H(0, 2) = \begin{bmatrix} 2 & -16 \\ -16 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\begin{bmatrix} 2 & -16 \\ -16 & 0 \end{bmatrix}) = -256 < 0 \Rightarrow (0, 2)$ es pto. de silla ;

$H(-2, \pm\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}) = 64 > 0 , 2>0 \Rightarrow$ los dos puntos C, D son puntos de mínimo local.

Observación : ninguno de los dos puntos C, D es punto de mínimo absoluto, ya que la función $f(x, y)= x^2+4x-x(y^2-2)^2$ no es acotada inferiormente (ni superiormente). En efecto si hallamos los valores de la función a lo largo de los puntos de la bisectriz de primero y tercer cuadrante, vemos que $f(x, x) = - x^5[1 - \dfrac{4x^3+x^2}{x^5}]$ y que

$\lim\limits_{x\to\infty} = - x^5[1 - \dfrac{4x^3+x^2}{x^5}] = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} - x^5[1 - \dfrac{4x^3+x^2}{x^5}] = +\infty$.

Observación importante.

Si en un punto crítico (interno al dominio de la función) la matriz hessiana es $H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ entonces :

i) si todos los autovalores de esta matriz son positivos, se tiene un **mínimo** local ;
ii) si todos los autovalores son negativos, se tiene un máximo local;
iii) si algunos son positivos y algunos negativos , hay punto de silla;
iv) si hay almenos un autovalor nulo y los que no son nulos tienen el mismo signo, no se puede decidir : por ejemplo las dos funciones

$h(x, y)=x^2+y^4$, $k(x, y) = x^2+y^3$, tienen punto crítico (0, 0) con la misma hessiana $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; h(x, y) tiene mínimo en (0, 0) mientras que k(0, 0) tiene pto. de silla en (0, 0).

Se verifica facilmente que para que no haya autovalores nulos debe ser $\det(H)= ac-b^2 \neq 0$;
si $ac-b^2 < 0$ se puede verificar que los autovalores de H tienen signo diferente por lo cual se tiene un pto. de silla;
si $ac-b^2 > 0$, a, c deben tener el mismo signo y entonces, si a es positivo se tiene un mínimo local y si a es negativo un máximo local.